УДК 532.546

И. К. Волянская, А. С. Шашков, А. Я. Шпилевой

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ СТОРОНАМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Для определения комплексных потенциалов фильтрационных течений в области, ограниченной сторонами прямоугольника, использован метод отражений особых точек. Рассмотрены возможные условия на границах. Решения получены в виде бесконечных рядов. Для случая точечного источника ряды выражены через тета-функцию Якоби или сигма-функцию Вейерштрасса.

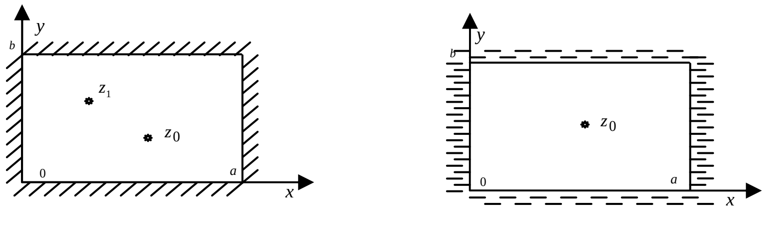
The article uses the method of spatial point reflection for the definition of complex potentials of filtrational flows in an area limited by rectangle. The article considers possible conditions and generates solutions in the form of infinite series. For point source the series are presented by means of the Jacobi theta-function or the Weierstrass sigma-function.

Ключевые слова: комплексные потенциалы, фильтрационное течение, точечный источник, тета-функция Якоби, сигма-функция Вейерштрасса.

Keywords: complex potentials, filtrational flows, point source, the Jacoby theta-function, the Weierstrass sigma-function.

1. Для исследования фильтрационных течений жидкости, подчиняющихся закону Дарси, используется комплексный потенциал $W(z) = \varphi(x, y) + i\varphi(x, y)$, с помощью которого можно определить поле скоростей и поле давлений [1].

2. Пусть область фильтрации представляет собой внутреннюю область прямоугольника. Рассматриваются различные типы границ: непроницаемые или касающиеся свободной жидкости (рис. 1, 2).



а *б*

Рис. 1. Область фильтрации с однородными граничными условиями

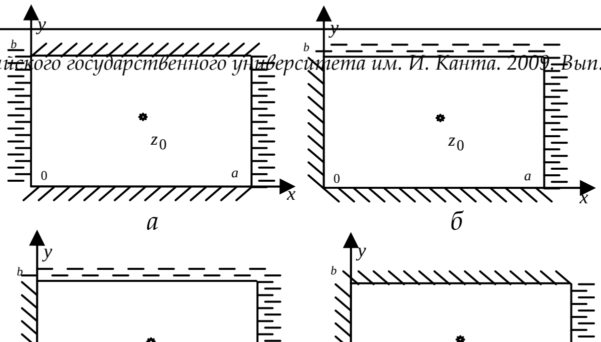


Рис. 2. Область фильтрации с различными граничными условиями

Аналитическим выражением метода отражений особых точек являются теоремы о прямой и окружности [1; 2]. Используем только теорему о прямой.

Пусть границей области фильтрации является ось y, а областью фильтрации полуплоскость Re z<0. Полагаем, что особые точки функции $f(z)$ находятся в области Re z <0. Если граница x=0 непроницаема (+) или заполнена свободной жидкостью (–), то теорема о прямой имеет вид

$$W(z) = f(z) \pm \bar{f}(-z) \,. \tag{1}$$

Если границей раздела является ось x, то аргументом второго слагаемого выражения (1) вместо –z будет z.

Применяя последовательно теорему (1) относительно сторон прямоугольника, можно получить комплексные потенциалы течений в области, ограниченной сторонами прямоугольника с различными граничными условиями.

3. Пусть область фильтрации окружена свободной жидкостью (рис. 1, б) [3]. Применяя метод отражений особых точек, получаем:

$$W(z) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} [\, f(z+T) + f(-z+T) - \bar{f}(z+T) - \bar{f}(-z+T) \,, \tag{2}$$

где $T = T_{k,m} = 2ka + 2mbi$.

Пусть в области фильтрации находится точечный сток (скважина). В этом случае

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) \,. \tag{3}$$

Записывая выражение (2) для функции (3) и преобразуя результат, получаем:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sigma(z - \bar{z}_0)\sigma(z + \bar{z}_0)}{\sigma(z - z_0)\sigma(z + z_0)} \,, \tag{4}$$

где σ(z) — сигма-функция Вейерштрасса. Аналогичный результат получен другим методом в работе [4] для электрического поля заряда, расположенного внутри прямоугольника.

В работе [5] получено решение этой задачи с помощью тета-функции Якоби

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\vartheta_0(\nu_3)\vartheta_0(\nu_4)}{\vartheta_0(\nu_1)\vartheta_0(\nu_2)}, \tag{5}$$

где $\nu_1 = \dfrac{z - z_0 + a}{2ib}, \nu_2 = \dfrac{z + z_0 + a}{2ib}, \nu_3 = \dfrac{z - \bar{z}_0 + a}{2ib}, \nu_4 = \dfrac{z + \bar{z}_0 + a}{2ib}$.

4. Пусть область фильтрации ограничена непроницаемыми границами (1, а). Зададим в области фильтрации непроницаемые источник и сток:

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0) - \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_1).$$

Решение задачи для этого случая имеет вид [2]

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\sigma(z - z_0)\sigma(z + z_0)\sigma(z - \bar{z}_0)\sigma(z + \bar{z}_0)}{\sigma(z - z_1)\sigma(z + z_1)\sigma(z - \bar{z}_1)\sigma(z + \bar{z}_1)}. \tag{6}$$

5. Пусть область фильтрации имеет вид, указанный на рисунке 2, а, и в ней находится источник, описываемый функцией

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0).$$

Решение задачи находим в два этапа.

Сначала находим комплексный потенциал точечного источника в области между двумя непроницаемыми стенками y=0 и y=b [2]:

$$W(z) = \ln\sin\frac{\pi(z - z_0)}{2ib} + \ln\sin\frac{\pi(z - \bar{z}_0)}{2ib}, \tag{7}$$

Если границами являются прямые x=0 и x=a и область фильтрации ограничена свободной жидкостью, то для функции $f(z)$ решение имеет вид

$$W(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{f(z + 2ka) + \bar{f}(-z + 2ka)\right\}. \tag{8}$$

Записывая выражение (8) для функции (7), получаем комплексный потенциал источника в заданной области (рис. 2, а):

$$W(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\ln\frac{\sin\frac{\pi}{2bi}(z + 2ak - z_0)\sin\frac{\pi}{2bi}(z + 2ak - \bar{z}_0)}{\sin\frac{\pi}{2bi}(-z + 2ak - z_0)\sin\frac{\pi}{2bi}(-z + 2ak - \bar{z}_0)}. \tag{9}$$

Выражение (9) преобразуем, пользуясь определением тета-функции Якоби:

$$\vartheta_0(\upsilon) = H_0\prod_{m=1}^{\infty}\left[1 - q^{2m-1}e^{2\pi i\upsilon}\right]\left[1 - q^{2m-1}e^{-2\pi i\upsilon}\right],\ H_0 = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - q^{2m}\right). \tag{10}$$

В результате получаем:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\vartheta_0(\nu_1)\vartheta_0(\nu_3)}{\vartheta_0(\nu_2)\vartheta_0(\nu_4)},\ q = e^{-\pi\frac{a}{b}}, \tag{11}$$

аргументы ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 такие же, как в выражении (5).

6. Рассмотрим область фильтрации, указанную на рисунке 2, б. Общее решение задачи, полученное для этого случая методом отражений, имеет вид

$$W(z) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+m}[f(z+T) + f(-z+T) + \bar{f}(z+T) + \bar{f}(-z+T)], \tag{12}$$

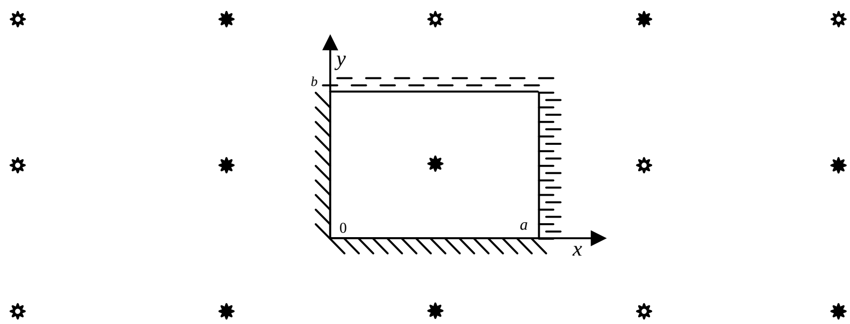


Рис. 3. Положение особых точек: ✸ — источник, ✲ — сток

Решение (12), записанное для точечного источника, представим в виде

$$W(z) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\ln(z-z_0-T)+\ln(z-\bar{z}_0-T)+\ln(z+z_0-T)+\\ +\ln(z+\bar{z}_0-T)-\ln(z-z_1-T)-\ln(z-z_1'-T)-\\ -\ln(z+z_1'-T)-\ln(z+z_1-T)-\ln(z-z_2-T)-\\ -\ln(z-\bar{z}_2-T)-\ln(z+z_2-T)-\ln(z+\bar{z}_2-T)+\\ +\ln(z-z_3-T)-\ln(z-z_3'-T)+\ln(z+z_3'-T)+\\ +\ln(z+z_3-T)\end{array}\right\}, \tag{13}$$

где $z_1 = z_0 - 2bi, z_1' = z_0 - 2bi, z_2 = z_0 - 2a, z_3 = z_0 - 2a - 2bi,$
$z_3' = z_0 - 2a - 2bi, T = 4ka + 4mbi$.

Воспользуемся определением сигма-функции Вейерштрасса:

$$\sigma(z) = z\prod_{k,m}^{\infty}\left(1-\frac{z}{T}\right)\exp\left(\frac{z}{T}+\frac{z^2}{2T^2}\right),\ k,m = \pm1,\pm2,\ldots \tag{14}$$

Каждое из слагаемых выражения (13) преобразуем с помощью формулы (14); тогда решение задачи принимает вид

$$\begin{array}{l}W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln[\sigma(z-z_0)\sigma(z-z_0)\sigma(z+z_0)\sigma(z+z_0)\sigma(z-z_3)\sigma(z-z_3')*\\ *\sigma(z+z_3)\sigma(z+z_3')/\sigma(z-z_1)\sigma(z+z_1)\sigma(z-z_1')\sigma(z+z_1')\sigma(z-z_2)*\\ *\sigma(z+z_2)\sigma(z-z_2)\sigma(z+z)].\end{array} \tag{15}$$

7. Определим комплексный потенциал для точечного источника в области, указанной на рисунке 2, г. Задача решается аналогично предыдущей.

Общее решение задачи, полученное методом отражений для произвольной аналитической функции $f(z)$, имеет вид

$$W(z)=\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}\left[\begin{array}{l} f(z+T)+f(-z+T)+\bar{f}(z+T)+\bar{f}(-z+T)-f(z+T-2a)- \\ -f(-z+T-2a)-\bar{f}(z+T-2a)-\bar{f}(-z+T-2a) \end{array}\right]. \qquad (16)$$

Решение (16) записываем для точечного источника и преобразуем к виду

$$W(z)=\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\sigma(z-z_0)\sigma(z-\bar{z}_0)\sigma(z+\bar{z}_0)\sigma(z+z_0)}{\sigma(z-z_1)\sigma(z+z_1)\sigma(z-\bar{z}_1)\sigma(z+\bar{z}_1)}, \qquad (17)$$

где $z_1=z_0+2a$.

8. Определим комплексный потенциал точечного источника для области, указанной на рисунке 2, в. Используя метод отражений особых точек для аналитической функции $f(z)$, получаем общее решение в виде

$$W(z)=\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}\left[\begin{array}{l} f(z-T)-f(-z+T)-\bar{f}(z-T)+\bar{f}(-z+T)-f(z+T-2a)+ \\ +f(-z+T-2a)+\bar{f}(z+T-2a)-\bar{f}(-z+T-2a) \end{array}\right], \qquad (18)$$

где T имеет такой же вид, как в п. 6, 7. Решение (18) записываем для функции $f(z)=\ln(z-z_0)$ и результат преобразуем к виду

$$W(z)=\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\sigma(z-z_0)\sigma(z+\bar{z}_0)\sigma(z-\bar{z}_1)\sigma(z+z_1)}{\sigma(z+z_0)\sigma(z-z_1)\sigma(z-\bar{z}_0)\sigma(z+\bar{z}_1)}, \qquad (19)$$

где $z_1=z_0+2a$.

Таким образом, определены комплексные потенциалы фильтрационных течений в области, ограниченной прямоугольником с различными граничными условиями.

Отметим, что решения, выраженные через сигма-функцию Вейерштрасса, могут быть также выражены через тета-функцию Якоби.

Полученные в работе результаты могут быть использованы для решения практических задач в теории фильтрации, теплопроводности, электричества и магнетизма.

Список литературы

1. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М., 1972.

2. *Зайцев А.А, Шпилевой А.Я.* Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах. Калининград, 2001.

3. *Шпилевой А.Я.* Моделирование фильтрационных течений жидкости в кусочно-однородных средах методом изображения особых точек // Материалы всероссийской научно-практической конференции: «Вклад земляков-орловцев в развитии и становление российской науки, культуры и образования». Орел, 2003. Т. 3. С. 134—136.

4. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965.

5. *Севастьянова Н.В., Шпилевой А.Я.* Решение задач теории фильтрации, выраженные через тета-функцию Якоби для областей в виде прямоугольника и равностороннего треугольника // Труды международной конференции: «Современные методы физико-математических наук». Орел, 2006. Т. 2. С. 67—70.

Об авторах

А.Я. Шпилевой — канд. физ.- мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта.

И.К. Волянская — студ., РГУ им. И. Канта.

А.С. Шашков — учащийся малого физ.-тех. факультета, РГУ им. И. Канта и лицея №18.

Authors

A. Shpilevoy — Dr., IKSUR.

I. Volyanskaya — student, IKSUR.

A. Shashkov — student, IKSUR.